Грађевински факултет Универзитета у Београду 25.2.2024.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име: Број индекса:

1. Дефинисати појам детерминанте. Одредити $\det(2024A)$ ако је $A = [a_{ij}]$ матрица реда 3, дата са: $a_{ij} = 4,\ i \neq j$ и $a_{ij} = 0,\ i = j$. (2)

Дефиниција 2.3 на страни 46.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ \det(A) = 128 \quad \Longrightarrow \quad \det(2024A) = 128 \cdot 2024^3.$$

2. Дате су квадратне матрице A и B. Дефинисати појмове: $A \sim B$ и $A \approx B$. Да ли су еквивалентне матрице истовремено и сличне? Образложити одговор. (2)

Дефиниције 2.24 на страни 66 и 2.38 на страни 83.
Еквивалентне квадратне матрице не морају бити и сличне. На пример матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

су очигледно еквивалентне, али нису сличне, јер је на пример $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \neq \varphi_B(\lambda) = \lambda^2$.

3. Дефинисати појам линеарног оператора и дати један пример оператора $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Затим за одабрани оператор L одредити $L(u)$, где је $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2)

Дефиниција 2.31 на страни 74.
Свака матрица $A \in \mathbb{M}_{32}(\mathbb{R})$ одређује једно линеарно пресликавање $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. На пример, матрицом $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, дато је линеарно пресликавње $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 2x + y \\ x \end{bmatrix}$, те је $L(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Дефинисати појмове сопствених вредности и сопствених вектора квадратне матрице. Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе јединичне матрице реда 4. (2)

Дефиниција 2.44 на страни 91. Сопствене вредности јединичне матрице реда 4 очигледно су $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, док су одговарајући сопствени вектори

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Дефинисати појам подниза и појам тачке нагомилавања низа реалних бројева. (1)

Дефиниције 4.12 и 4.13 на страни 176.

6. Дати пример функције дефинисане на $\mathbb{R}$ која има отклоњив прекид у тачки $x_1 = 0$, а у превојној тачки $x_2 = 1$ има локални минимум. Скицирати график одабране функције. (2)

Бирамо што једноставнију функцију чија је област дефинисаности $\mathbb{R}$, тако да задовољава тражене услове. Једна таква функција је, на пример

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

7. За функцију $f : I \to \mathbb{R}$ дефинисати појмове: 1) f је ограничена на I; 2) f је монотоно опадајућа на I; 3) f има локални максимум у тачки $x_0 \in I$. (2)

Дефиниције 5.2 и 5.3 на страни 184 и дефиниција 6.4 на страни 223.

8. Формулисати Фермаову теорему. (1)

Теорема 6.6 на страни 224.

9. Формулисати и доказати Кејли-Хамилтонову теорему. (3)

Теорема 2.23 на страни 92.

10. Нека су f и g непрекидне функције на одсечку $[a, b]$ за које важи $f(a) < g(a)$ и $f(b) > g(b)$. Показати да онда постоји тачка $\zeta \in (a, b)$ за коју је $f(\zeta) = g(\zeta)$. (3)

Видети задатак 60 на страни 211.

Упутство: Применити теорему о нулама непрекидне функције на одсечку (Теорема 5.7 на страни 202) на функцију $h(x) = f(x) - g(x)$.